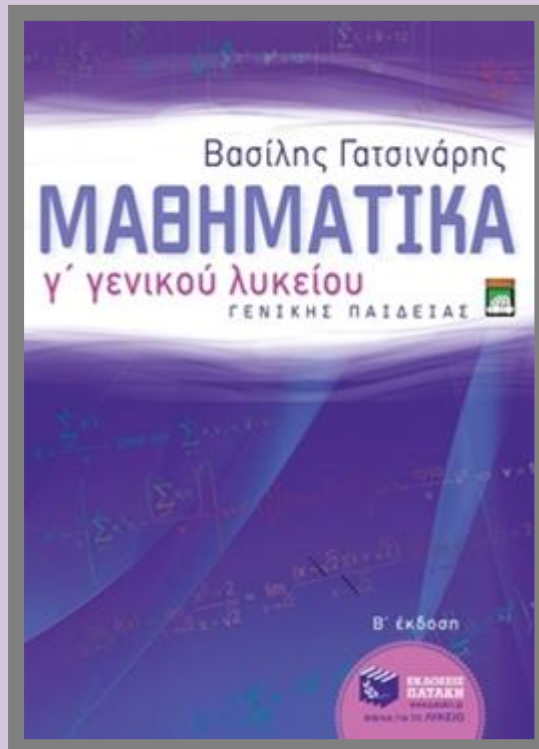


ΦΥΛΛΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ



Βασίλης Γατσινάρης

Δωρεάν υποστηρικτικό υλικό

Όνομα:

Βαθμός:

Περί συναρτήσεων

Ημερομηνία : _-_-

Θεωρία

Έστω η ορισμένη στο διάστημα D συνάρτηση f

A₁ ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο D

A₂ ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο D

B₁ ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_1 \in D$ **μέγιστο**.

B₂ ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_1 \in D$ **τοπικό μέγιστο**.

Γ₁ ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_2 \in D$ **ελάχιστο**.

Γ₂ ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_2 \in D$ **τοπικό ελάχιστο**.

Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$, με $x \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 0$

B₁) Να αποδείξετε ότι το διάγραμμα C_f τέμνει τους άξονες μόνο στην αρχή $O(0,0)$

B₂) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f είναι **θετική**.

Γ) Να βρείτε το **σημείο τομής M** της C_f με την ευθεία $(\epsilon) : y = e - 1$

Δ) Να βρείτε τους **θετικούς** πραγματικούς x , ώστε $f(\ln x) = 2x^2 - 1$

E₁) Να βρείτε το **πεδίο ορισμού A** της συνάρτησης $F(x) = \frac{f(x)}{f(-x)}$

E₂) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(x) = -1$ είναι **αδύνατη**.



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Όρια

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία**A**  Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες στο x_0 έχουν όρια **πραγματικούς** αριθμούς και έστω ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ Τότε • $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \dots\dots\dots$ • $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \dots\dots\dots$ **B₁** Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 + f(x)} = 2$ **B₂** Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{f(x) - g(x)} = 0$ **Θέμα**Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + k$, $x \in \mathbf{R}$ και $k \in \mathbf{R}$ Ξέρουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x+1} \right) = 1$ **A)** Να αποδείξετε ότι $k = 1$ και να γράψετε τον **τύπο** της f **B)** Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ **Γ₁)** Να βρείτε την **τιμή** του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x-1)}{f(x)} \right)$ **Γ₂)** Να βρείτε την **τιμή** του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)-3}{x-1} \right)$ **Γ₃)** Αν $\lim_{x \rightarrow \lambda} \left(\frac{f(x) + \lambda}{x^2 + 1} \right) = 0$, να βρείτε την **τιμή** της παραμέτρου λ 

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Συνέχεια

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία

A ☞ Να αναφέρετε, πότε η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , λέγεται **συνεχής** στο A

B₁ Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, η συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής** στο σημείο 0

B₂ Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, και η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο 0 , τότε $f(0) = 0$

B₃ Αν η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο \mathbf{R} με μία **ρίζα** το 1 , τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

B₄ Αν η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο \mathbf{R} , η γραφική της παράσταση της θα είναι μία **συνεχής γραμμή**.

Θέμα

Έστω η **συνεχής** στο σημείο $x_0 = 2$, συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{αν } x \neq 2 \\ \alpha & \text{αν } x = 2 \end{cases}$

με $\alpha \in \mathbf{R}$

A) Να βρείτε την τιμή του α

B) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Γ₁) Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)$

Γ₂) Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(2)x^2 + 12x - 24}{x - 1} \right)$



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Παράγωγος αριθμός

Ημερομηνία : _ - _ - _

ΘεωρίαΈστω η συνάρτηση f και $M_o(x_o, f(x_o))$ ένα σημείο της C_f **A1** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **παράγωγο** της f στο x_o **A2** ☞ Να αναφέρετε πως **συμβολίζεται** ο παράγωγος στο x_o **A3** ☞ Να αναφέρετε τι **εκφράζει γεωμετρικά** ο παράγωγος στο x_o **A4** ☞ Να γράψετε την **εφαπτόμενη** ευθεία ε της C_f στο σημείο της M_o
σε συνάρτηση **μόνο** των αριθμών x_o , του $f(x_o)$ και $f'(x_o)$ **B)** Έστω $s = s(t)$, η συνάρτηση **θέσης** ενός κινητού K που **κινείται ευθύγραμμα**.**B1** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **μέση ταχύτητα** \bar{u} του κινητού
στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος h , από t_o μέχρι $t_o + h$ **B2** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** u_o του κινητού τη στιγμή t_o **Θέμα**Έστω η συνάρτηση $s \equiv s(t) = t^2$ **A1)** Να αποδείξετε ότι η s είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο 1 , με $s'(1) = 2$ **A2)** Να βρείτε την **εξίσωση** της **εφαπτομένης** της C_s , στο σημείο της $M(1, s(1))$ **B)** Έστω ότι η συνάρτηση s εκφράζει τη συνάρτηση θέσης ενός κινητού K
που κινείται ευθύγραμμα ...όπου $s(t)$ σε m και $t \geq 0$ σε sec **B1)** Να βρείτε τη **μέση ταχύτητα** \bar{u} του K , στο διάστημα από 1 μέχρι $2 sec$ **B2)** Να βρείτε τη **στιγμιαία ταχύτητα** u του K , τη χρονική στιγμή $1 sec$ 

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Παράγωγος συνάρτηση

Ημερομηνία : _-_-

Θεωρία**A)** Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A **A₁** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **παράγωγο** συνάρτησης της f **A₂** ☞ Πως **συμβολίζεται**;**A₃** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **δεύτερη παράγωγο** μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A **B₁** Η **παράγωγος** συνάρτησης της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι **σταθερή** συνάρτηση.**B₂** Αν f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbf{R} , με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ τότε ισχύει
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
ΘέμαΈστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2x + 1$ και $g(x) = e^x$ **A₁**) Να **ορίσετε** τη συνάρτηση h με $h(x) = \frac{f(x) - 1}{g(x)}$

Δηλαδή να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.

A₂) Να **λύσετε** την εξίσωση $h(x) = 0$ **B₁**) Να **βρείτε** την παράγωγο $h'(x)$ **B₂**) Αν x_0 η **μεγαλύτερη ρίζα** της $h(x) = 0$, να βρείτε την τιμή $h'(x_0)$ **B₃**) Αν η **κλίση** της **εφαπτομένης** της C_f στο σημείο της $M(x_1, f(x_1))$ ισούται με $h'(0)$, να βρείτε τις **συντεταγμένες** του σημείου M 

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Παράγωγος συνάρτηση

Ημερομηνία : _ - _

Θεωρία

A₁ ☞ Να αποδείξετε ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ είναι η συνάρτηση $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$

A₂ ☞ Έστω f, g δύο συναρτήσεις δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Να γράψετε τον τύπο παραγωγίσης της σύνθεσης $f(g(x))$

B₁ Αν f μια παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} συνάρτηση, τότε $(f(x))' = f'(x)$

B₂ Αν f μια παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} συνάρτηση με $f(x) = x$, τότε $(f(1))' = f'(1) = 1$

B₃ Αν f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbf{R} , τότε $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$

Θέμα

Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

να βρείτε τις παραγώγους αν: **A)** $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

B) $f(x) = x^3 - 2t^2 - x + \eta\mu t$, $x \in \mathbf{R}$ και $t \in \mathbf{R}$

Γ) $f(x) = x^2 e^x - \eta\mu x \ln x$, $x > 0$

Δ) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$, $x > 0$

E) $f(x) = x \sigma\upsilon\nu^2 x + x^2 \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbf{R}$

Z) $f(x) = \frac{e^x}{e^{-x} + 1}$, $x \in \mathbf{R}$



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Παράγωγος συνάρτηση

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία**A₁** Αν $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$, τότε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu \frac{\pi}{3}$ **A₂** Αν $f(x) = 2x$, τότε είναι $f''(x) = 0$ **A₃** Αν $f'(x) = 2x$, τότε αποκλείεται να είναι $f(x) = x^2 + x + 1$ **B₁*** Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$ και έστω ότι $g(x) = e^{x^2}$, με $x \in \mathbb{R}$ Υποθέτουμε ότι $f'(g(0)) = 1$ Τότε το $h'(0)$ ισούται με A: 0 B: 1 Γ: 2 Δ: 3 Ε: 4**B₂*** Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 30° Τότε η παράγωγος της f για $x = 1$ είναι A: 1 B: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ: $\sqrt{3}$ Δ: 0**Θέμα**Έστω $g(x) = f(x)(x-1)^3$ και $f(x) = \alpha x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Έστω ότι $f(1) = 2$ και $f'(1) = 1$ **A₁**) Να βρείτε τον τύπο της f και μετά να βρείτε και τον τύπο της g **A₂**) Να βρεθεί την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{g'(x)}{x^2 - x} \right)$ **A₃**) Να βρείτε τον παράγωγο αριθμό $g'(1)$ **B₁**) Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_g στο σημείο της εκείνο που αυτή τέμνει τον άξονα των τεταγμένων.**B₂**) Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_g , που είναι παράλληλη στον $x'x$


Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Παράγωγος συνάρτηση

Ημερομηνία : _ _ - _ - _

Θεωρία**A**  Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ **B₁** $(\eta\mu 2x)' = 2\sigma\upsilon\nu x$ **B₂** $(\eta\mu^2 x)' = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ **B₃** $(\epsilon\phi^2 x)' = 2\epsilon\phi x \cdot (\epsilon\phi x)'$ **B₄** $(\eta\mu^2(2x))' = 2\eta\mu(2x)\sigma\upsilon\nu(2x)$ **B₅** $2\sqrt{\eta\mu x}(\sqrt{\eta\mu x})' = \sigma\upsilon\nu(x)$ **Θέμα**

Η **θέση** ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$, όπου ο χρόνος $t \geq 0$ μετράται σε **sec** και το x σε **m**

A) Να βρείτε την **ταχύτητα** και την **επιτάχυνση** του σημείου για $t = 1\text{sec}$ **B)** Πότε το **υλικό σημείο** είναι **στιγμαιαία ακίνητο**;**Γ)** Πότε το σημείο **κινείται** κατά την **θετική** ή την **αρνητική** κατεύθυνση ;**Δ)** Να βρείτε το **ολικό διάστημα** που έχει **διανύσει** το σημείο στη διάρκεια των πρώτων **6sec**

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Εφαρμογές παραγώγων

Ημερομηνία : _ _ - _ - _

Θεωρία**A₁** ☞ Αν για τη συνάρτηση f είναι $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$f'(x) > 0 \text{ στο } (\alpha, x_0) \text{ και } f'(x) < 0 \text{ στο } (x_0, \beta)$$

τότε η f θα παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) , για $x = x_0$ **A₂** ☞ Αν για τη συνάρτηση f είναι $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$f'(x) < 0 \text{ στο } (\alpha, x_0) \text{ και } f'(x) > 0 \text{ στο } (x_0, \beta)$$

τότε η f θα παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ **B₁** Αν $f(x) = e^x + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα.**B₂** Αν $f'(x) = e^x + x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα.**B₃** Αν $f'(x) = e^x - 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ τότε η f θα είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$, αφού $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και η f θα είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$, αφού $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ Οπότε η f στο σημείο 0 παρουσιάζει το μοναδικό της ελάχιστο.**Θέμα**Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3 \frac{x-1}{e^x}$, με $x \in \mathbf{R}$ **A)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} \right)$ **B)** Να αποδείξετε ότι $e^x (f'(x) + f''(x)) = -3$ **Γ₁)** Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.**Γ₂)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(e)$, $f(\sqrt{10})$ 

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Εφαρμογές παραγώγων

Ημερομηνία : _ - _

Θεωρία

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με λέξεις ή μαθηματικά σύμβολα ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

A1 ☞ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο του Δ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως στο Δ

A2 ☞ Η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x + 1$ είναι γνησίως στο $(0, +\infty)$ γιατί $f'(x)$, για κάθε $x > 0$

A3 ☞ Για την ορισμένη στο \mathbf{R} συνάρτηση f είναι $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$
Αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα
και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα
Έχει μοναδικό ολικό στο σημείο

Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

A1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

A2) Να βρείτε την $f'(x)$

A3) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή παρουσιάζει το τοπικό ακρότατο.

Γ) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$

Δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right)$



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Εφαρμογές παραγώγων

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία

Έστω το κινητό **K** που κινείται ευθύγραμμα με συνάρτηση θέσης $y = x(t)$
ταχύτητα $y = u(t)$ και επιτάχυνση $y = a(t)$

A1 ☞ Η ταχύτητα είναι η παράγωγος της θέσης $x(t)$

A2 ☞ Η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της θέσης $x(t)$

A3 ☞ Η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας $u(t)$

B1 ☞ Το **K** μένει στιγμιαία ακίνητο, αν $u(t) \dots 0$

B2 ☞ Το **K** κινείται κατά τη θετική φορά, αν $u(t) \dots 0$

B3 ☞ Το **K** κινείται κατά την αρνητική φορά, αν $u(t) \dots 0$

Θέμα

Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση
δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 + at^2 + bt$, $t \in [0,10]$

όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα **sec** και το x σε μέτρα **m**

A) Αν για την χρονική στιγμή $t = 1s$ η ταχύτητα του σημείου είναι $u(1) = 9m/s$

και η επιτάχυνση του $a(1) = -12m/s^2$, να βρείτε τις τιμές των a και β

B) Έστω $a = -9$ και $\beta = 24$

Να βρείτε **B1)** πότε το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι $9m/s$

B2) τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σημείο κινείται
κατά τη θετική ή την αρνητική κατεύθυνση.

B3) πότε το σημείο μένει ακίνητο.

B4) πότε η ταχύτητα του σημείου αυξάνεται και πότε μειώνεται.

B5) πότε η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη.

B6) ποιο είναι το ολικό διάστημα που διήνυσε το σημείο στα πρώτα
10 δευτερόλεπτα της κίνησής του.

Μαθηματικά
Γατσινάρης

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:


Βαθμός:

Βασικές έννοιες

Ημερομηνία : _ - _ -


Θεωρία


A) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω **εκφράσεις** δίνουν και **μεταβλητές** και τότε να εξετάσετε ποιες είναι **ποιοτικές** και ποιες είναι **ποσοτικές** και από τις **ποσοτικές** να βρείτε ποιες είναι **διακριτές** και ποιες είναι **συνεχείς**.

A₁  Η βαθμολογία των μαθητών στο **Λύκειο**.

A₂  Η βαθμολογία των μαθητών στην **A' Δημοτικού**.


A₃  Η βαθμολογία των μαθητών στην **ΣΤ' Δημοτικού**.

A₄  Εξετάσαμε τους μαθητές ενός λυκείου και τους κατατάξαμε σχετικά με το ύψος τους, σε «**Κοντούς**» ή «**Ψηλούς**».

A₅  Εξετάσαμε τους μαθητές ενός λυκείου σχετικά με το ύψος τους και τους **ομαδοποιούμε** αναγράφοντας το ύψος τους σε **cm** σε αυτούς των οποίων το ύψος είναι μικρότερο από **165 cm** και σ' αυτούς που είναι από **165 cm** και **πάνω**.

A₆  Εξετάσαμε τους μαθητές ενός λυκείου σχετικά με το **βάρος** τους σε **kg**.

B) Θα ελέγξουμε ποια από τα δείγματα είναι το πιο **αντιπροσωπευτικό**. Κάποιος θέλει να σχηματίσει μια ιδέα σχετικά με το πώς έγραψαν οι μαθητές, στις Πανελλήνιες εξετάσεις.

Έτσι **B₁**  **Τηλεφωνεί** σε **γνωστούς** του μαθητές.

B₂  **Επιλέγει** μαθητές από **διάφορα Λύκεια** της Ελλάδας.

Θέμα

Έγινε μια **δειγματοληψία** για το πόσα **αδέρφια** έχουν **30** μαθητές ενός τμήματος.

Εξετάσαμε **10** απ' αυτά και πήραμε τα αποτελέσματα: **1, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 3, 1, 2**

Να βρείτε **A)** Ποιος είναι ο **πληθυσμός**.

B) Ποιες είναι οι **μονάδες** του **πληθυσμού**.

Γ) Ποιο είναι το **δείγμα**.

Δ) Ποια είναι η **μεταβλητή**, ποιες οι **παρατηρήσεις** και ποιες οι **τιμές**.

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Παρουσίαση διακριτών μεταβλητών

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία

Έστω ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι **τιμές** με συχνότητες αντίστοιχα τις v_1, v_2, \dots, v_k μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n με $k \leq n$

A₁ ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **απόλυτη** συχνότητα v_i της τιμής x_i

A₂ ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **σχετική** συχνότητα f_i της τιμής x_i

A₃ ☞ Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

B₁ Είναι $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$

B₂ Είναι $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$

B₃ $f_i \% = 100f_i$

Θέμα

Ρωτήσαμε **50** οικογένειες σχετικά με τον αριθμό των παιδιών τους. Πήραμε το διπλανό πίνακα.

Να βρείτε **A₁**) Τις **τιμές** της μεταβλητής

A₂) Τις **συχνότητες** αυτών.

A₃) Τις **σχετικές** συχνότητες και τις **εκατοστιαίες σχετικές** συχνότητες αυτών.

A₄) Τις **αθροιστικές** συχνότητες και τις **αθροιστικές εκατοστιαίες σχετικές** συχνότητες αυτών.

B₁) Πόσες οικογένειες έχουν το **πολύ 2** παιδιά.

B₂) Πόσες οικογένειες έχουν **τουλάχιστον 2** παιδιά.

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών v_i
0	5
1	10
2	15
3	8
4	5
5	4
6	3
	50

Μαθηματικά
Γατσινάρης

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Παρουσίαση διακριτών μεταβλητών

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία

Έστω ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές με συχνότητες αντίστοιχα τις v_1, v_2, \dots, v_k μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους v με $k \leq v$

A1 ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **αθροιστική** συχνότητα N_i της τιμής x_i

A2 ☞ Να αναφέρετε τι εκφράζει η **αθροιστική** συχνότητα N_i της τιμής x_i

A3 $N_1 + N_2 + \dots + N_k = 1$

A4 $N_k = N_{k-1} + v_k$

A5 $N_k = v$

B1 ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **σχετική αθροιστική** συχνότητα F_i της τιμής x_i

B2 ☞ Να αναφέρετε τι εκφράζει η **σχετική αθροιστική** συχνότητα F_i της τιμής x_i

B3 Είναι $f_i \leq v_i$ για $i = 1, 2, \dots, k$

Θέμα

Έστω ο πίνακας που δείχνει τις τιμές **1,2,3,4,5,6** μίας μεταβλητής.

Για κάποιο λόγο, σβήστηκαν δεδομένα.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1						10
2	8	0,16				
3				0,5		
4					14	
5	12				24	
6						
Σύνολο						

A) Να βρείτε το μέγεθος v του δείγματος

B) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Ποιοτικές μεταβλητές

Ημερομηνία : _ - _ -

ΘεωρίαΈστω η **ποιοτική** μεταβλητή **X**

A₁ Στο **ραβδόγραμμα** συχνοτήτων το **άθροισμα** των **υψών** των ορθογωνίων είναι ίσο με το **μέγεθος** του δείγματος **v**

A₂ Το **κυκλικό** διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για την απεικόνιση **ποιοτικών** μεταβλητών.

A₃ Στο **κυκλικό** διάγραμμα η συχνότητα **v_i** μια τιμής **x_i** είναι **ανάλογη** προς το **αντίστοιχο τόξο** του κυκλικού **τομέα** στον οποίο αντιστοιχεί.

A₄ Σε ένα **κυκλικό διάγραμμα** ισχύει $\alpha_i = \frac{f_i}{v} 360^\circ$

Θέμα

Με ένα **κυκλικό διάγραμμα** παριστάνεται το **μορφωτικό** επίπεδο των **800** εργαζομένων μιας επιχείρησης σε **4** **κατηγορίες**.

A' Κατηγορία : **Απόφοιτοι Γυμνασίου**.

B' Κατηγορία : **Απόφοιτοι Λυκείου**.

Γ' Κατηγορία : **Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης**.

Δ' Κατηγορία : **Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου**.

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε **μία μόνο** από τις **κατηγορίες** αυτές.

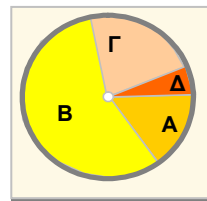
Στην **A' Κατηγορία** ανήκει το **25%** των εργαζομένων της επιχείρησης.

Η **γωνία** του τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της **Δ' Κατηγορίας** είναι **18°**

Οι εργαζόμενοι της **B'** κατηγορίας είναι **6 – πλάσιοι** των εργαζομένων της **Γ'** Κατηγορίας.

A) Να υπολογίσετε τον **αριθμό** των εργαζομένων **κάθε κατηγορίας**.

B) Να **παραστήσετε** με **ραβδόγραμμα** την πιο πάνω κατανομή.



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Ποσοτικές μεταβλητές

Ημερομηνία: _ - _ -

Θεωρία

A Αν ενώσουμε τα μέσα των πάνω βάσεων του ραβδογράμματος προκύπτει τμήμα του πολυγώνου συχνότητας.

B* Έστω μεταβλητή με τιμές x_1, x_2, \dots, x_k με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k . Το πλήθος του δείγματος είναι n και ξέρουμε ότι $N_k = 10$, $v_{k-1} = 1$ και $v_k = 2$. Τότε δεν είναι ορθή η επιλογή

A: $N_k - N_{k-2} = 3$

B: $N_{k-2} = 7$

Γ: $N_{k-1} = 8$

Δ: $N_{k-2} + N_{k-1} = 13$

Θέμα

Οι βαθμοί 50 φοιτητών στο μάθημα των μαθηματικών φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

A) Συμπληρώσετε τον πίνακα με τις στήλες των f_i , $f_i\%$, N_i , F_i , $F_i\%$

B) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και μετά το αντίστοιχο πολύγωνο.

Γ) Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των φοιτητών που έγραψαν **Γ₁) 5**

Γ₂) Από 6 ως και 8

Γ₃) Πάνω από 8

x_i	v_i
1	3
2	2
3	5
4	3
5	7
6	9
7	7
8	7
9	5
10	2
	50

Δ₁) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των εκατοστιαίων σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο.

Δ₂) Η σχολή θα δώσει υποτροφία στο 14% των φοιτητών με την μεγαλύτερη βαθμολογία.

Να βρείτε ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός που πρέπει να γράψει ένας φοιτητής για να πάρει υποτροφία.



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Ποσοτικές μεταβλητές

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία

A Πλάτος της κλάσης με άκρα α , β ονομάζεται ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$

B Το κέντρο κάθε κλάσης ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της.

Γ Το άθροισμα των κεντρικών τιμών ιστοπλάτων κλάσεων ισούται με το εύρος.

Δ Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων

αν R είναι το εύρος του δείγματος και k ο αριθμός των κλάσεων το πλάτος

των κλάσεων c , είναι $c \cong \frac{R}{k}$ στρογγυλεύοντας ίσως προς τα πάνω.

Θέμα

Η βαθμολογία 50 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι η πιο κάτω.

3	4	5	8	9	7	6	8	7	10
8	7	6	5	9	3	8	5	6	6
6	3	5	6	4	2	9	8	7	7
1	6	3	1	5	8	1	2	3	4
5	6	7	9	10	9	8	7	6	5

A₁) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

A₂) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

B₁) Να ομαδοποιήσετε τα πιο πάνω δεδομένα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους 2

Γνωρίζουμε ότι η κεντρική τιμή της πρώτης κλάσης ισούται με 2

B₂) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

B₃) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

Γ) Ο καθηγητής επέλεξε να τους προάγει στο επόμενο έτος με βάση την ομαδοποίηση, αλλά οι φοιτητές αντέδρασαν, είχαν δίκιο



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου


Όνομα:

Βαθμός:

Επαναληπτικό

Ημερομηνία : _ _ - _ - _

Θεωρία

A  Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

B₁ Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για ποιοτικά δεδομένα.

B₂ Πλάτος της κλάσης $[α, β)$ ονομάζεται ο αριθμός $|α - β|$

B₃ Το άθροισμα των κεντρικών τιμών ισοπλατών κλάσεων, ισούται με το εύρος.

Θέμα

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{10x - 10}{x^2 - x}$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

και ο πιο κάτω ημιτελής πίνακας συχνοτήτων.

x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	$x_i v_i$	N_i
0			4		
1	μ				
2					
3	ξ	0,2			
4		0,16			

A) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g

B) Να βρείτε τα όρια **B₁)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, **B₂)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x - 1)}{g(x)}$

Γ₁) Αφού απλοποιήσετε τον τύπο της f να βρείτε τη πρώτη παράγωγο της.

Γ₂) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$

Δ₁) Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της g

Δ₂) Να εξετάσετε τη g' ως προς τα ακρότατα.

E) Έστω τώρα ότι $\mu = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\xi = g''(4) - 8$

E₁) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

E₂) Να κάνετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

E₃) Να ομαδοποιήσετε τα πιο πάνω δεδομένα σε 3 κλάσεις ίσου πλάτους 1,5

όπως θέλετε και να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Μέση τιμή

Ημερομηνία : _ - _ - _

Θεωρία**A₁** ☞ Να αναφέρετε τι λέμε **μέση τιμή**ή **αριθμητικό μέσο** \bar{x} των n παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n ενός δείγματος.**A₂** ☞ Αν στις τιμές x_1, x_2, \dots, x_k δίνεται διαφορετική **βαρύτητα** ή **έμφαση** χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο**.Αν σε κάθε τιμή x_1, x_2, \dots, x_k δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους **συντελεστές βαρύτητας** ή **στάθμισης** w_1, w_2, \dots, w_k να αναφέρετε από ποιον τύπο δίνεται ο **σταθμικός μέσος**.**B** Έστω ότι σε μία δειγματοληψία έχουμε **20** παρατηρήσεις τις t_1, t_2, \dots, t_{20} ανά δύο ίδιες και τις **10** τιμές x_1, x_2, \dots, x_{10} της.Η **μέση τιμή** των παρατηρήσεων είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{20}}{20} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i v_i}{n} = \frac{\dots + \dots + \dots + \dots}{20} = \frac{\dots + \dots + \dots + \dots}{10}$$

ΘέμαΟ **χρόνος ομιλίας** σε κινητό **10** μαθητώνδίνεται από τον πίνακα: **10 , 10 , 20 , 30 , 20 , 10 , 10 , 20 , 30 , 20**

σε λεπτά

A) Να βρείτε το **μέσο όρο** του χρόνου ομιλίας.**B)** Αν **αυξήσουν** όλοι το χρόνο ομιλία τους κατά **χρόνο t** σε **min** και **νέος μέσος όρος** του χρόνου ομιλίας είναι τώρα ίσος με **28 min** να βρείτε την **αύξηση t****Γ)** Αν **αυξήσουν** όλοι το χρόνο ομιλία τους κατά **x%**και **νέος μέσος όρος** του χρόνου ομιλίας είναι τώρα ίσος με **27 min** να βρείτε το **x**


Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Μέτρα θέσης σε διακριτή μεταβλητή

Ημερομηνία: _ - _ -

Θεωρία**A**  Να αναφέρετε πώς ορίζεται η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων.**B₁** Αν έχουμε **περιττό** πλήθος παρατηρήσεων, η διάμεσος θα είναι **τιμή** του δείγματος.**B₂** Αν η **διάμεσος** είναι **τιμή** του δείγματος, θα έχουμε **περιττό** πλήθος παρατηρήσεων.**B₃** Αν έχουμε **άρτιο** πλήθος παρατηρήσεων, η διάμεσος αποκλείεται να είναι τιμή του δείγματος.**B₄** Αν η διάμεσος **δεν** είναι **τιμή** του δείγματος, θα έχουμε **άρτιο** πλήθος παρατηρήσεων.**Θέμα**

Οι θερμοκρασίες των **20** πρώτων ημερών του μήνα Απριλίου σε βαθμούς Κελσίου °C φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

Η **μέση θερμοκρασία** των παραπάνω ημερών είναι **24,4°C**

A₁) Να **συμπληρώσετε** τον πίνακα.**A₂**) Να βρείτε την **διάμεση** θερμοκρασία.**B**) Από κάποιο όμως λάθος, διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο έδειχνε **ένα βαθμό περισσότερο** από το κανονικό.

Να βρείτε τη **νέα πραγματική μέση θερμοκρασία**.

Γ) Τώρα μετα την αλλαγή των θερμοκρασιών

να **ομαδοποιήσετε** τα δεδομένα σε **3** κλάσεις ίσου πλάτους **2** και να **βρείτε** την **νέα μέση τιμή**.

x_i	v_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

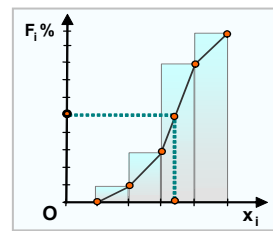
Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Μέτρα θέσης σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Ημερομηνία : - -

Θεωρία**A** ☞ Έστω μία **συνεχής** μεταβλητή στην οποία **ομαδοποιήσαμε** τα δεδομένα.**A₁** ☞ Να αναφέρετε πως ορίζουμε τη **μέση τιμή** των παρατηρήσεων.**A₂** ☞ Να αναφέρετε πως ορίζουμε τη **διάμεσο** των παρατηρήσεων.**Θέμα**

Η **βαθμολογία 50** μαθητών σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Κλάσεις	v_i
[10,12)	5
[12,14)	10
[14,16)	20
[16,18)	10
[18,20)	5
ΣΥΝΟΛΟ	50

Οι παρατηρήσεις θεωρούμε ότι είναι όμοιες, δηλαδή ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

A) Να κατασκευάσετε το **ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών** συχνοτήτων επί τοις **εκατό**, καθώς και το αντίστοιχο **πολύγωνο**.**B)** Να βρείτε τον **αριθμό** των μαθητών που **έγραψαν μέχρι 15****Γ₁)** Να υπολογίσετε τη **μέση βαθμολογία** των μαθητών.**Γ₂)** Να υπολογίσετε τη **διάμεση βαθμολογία** των μαθητών.

Δ) Αν για την επόμενη φάση του διαγωνισμού **προκρίνεται το 30%** των μαθητών ποιά είναι η **ελάχιστη βαθμολογία** που πρέπει να **γράψει** ένας μαθητής, ώστε να **προκριθεί** στην επόμενη φάση;

Μαθηματικά
Γατσινάρης

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

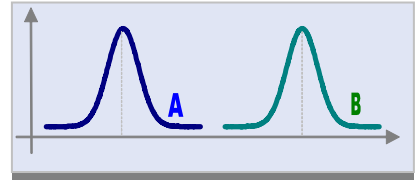
Βαθμός:

Μέτρα θέσης

Ημερομηνία : _ - _

Θεωρία

Έστω μία μεταβλητή στην οποία **ομαδοποιήσαμε** τα δεδομένα. Έστω και οι διπλανές καμπύλες συχνοτήτων κατανομών **A** και **B** ίδιου εύρους.



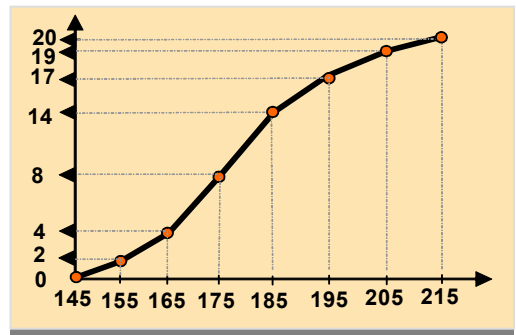
οι οποίες είναι συμμετρικές αντίστοιχα ως προς τις κατακόρυφες ευθείες που βλέπουμε.

A Είναι $\delta_A < \delta_B$

B Οι συχνότητες των **διαμέσων** είναι ίσες.

Θέμα

Σε ένα **σχολείο** πραγματοποιήθηκε μία έρευνα για το **ύψος** των μαθητών αλλά τα δεδομένα χάθηκαν και βρέθηκε μόνο το **πολύγωνο** των **αθροιστικών συχνοτήτων**.



Χρόνια	Κέντρο Κλάσης X_i	v_i	N_i	$F_i\%$
[145-155)	150			
[155-165)	160			
[165-175)	170			
[175-185)	180			
[185-195)	190			
[195-205)	200			
[205-215)	210			
Σύνολο		20		

A) Να συμπληρώσετε τον **πίνακα**.

B) Να αποδείξετε ότι για τη **διάμεσο** δ είναι $175 < \delta < 185$

Γ) Να βρείτε τη **μέση τιμή**.



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Μέτρα διασποράς

Ημερομηνία : _ - _

Θεωρία**A₁** ☞ Να αναφέρετε τι λέμε **εύρος** ή **κύμανση** κάποιων παρατηρήσεων.**A₂** ☞ Πως ορίζεται αυτή σε **ομαδοποιημένα δεδομένα** ;**B₁** ☞ Να αναφέρετε τι λέμε **διακύμανση** κάποιων παρατηρήσεων.**B₂** ☞ Πως ορίζεται αυτή σε **ομαδοποιημένα δεδομένα** ;**Θέμα**

Ένα **εργοστάσιο** έχει **v** στελέχη και **$4v$** εργάτες, με μισθούς x_i , $i = 1, \dots, 5v$ σε εκατοντάδες **€**ρο ...όπου **v** θετικός φυσικός.

Ο **μηνιαίος μισθός** κάθε **εργάτη** είναι **750€** και κάθε **στελέχους** είναι **1100€**

A₁) Να βρείτε το **μέσο μισθό** \bar{x}_E των εργατών και **μέσο μισθό** \bar{x}_S των στελεχών.**A₂**) Να βρείτε την **τυπική απόκλιση** των μισθών των εργατών και των στελεχών.**A₃**) Να βρείτε το **μέσο μηνιαίο μισθό** \bar{x} όλων των **υπαλλήλων**.**B**) Υποθέτουμε ότι η **τυπική απόκλιση** όλων των μισθών είναι **140 €**ροκαι $\sum_{i=1}^{5v} t_i^2 = 34.600.000$ €ρο

Δίνεται: $s^2 = \frac{1}{5v} \left\{ \sum_{i=1}^{5v} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5v} t_i \right)^2}{5v} \right\}$...όπου **$5v$** το πλήθος των **υπαλλήλων**.

Να αποδείξετε ότι το **εργοστάσιο** απασχολεί **50** υπαλλήλους.

Γ) Το εργοστάσιο αποφασίζει να **αυξήσει** τις μηνιαίες αποδοχές των εργατών κατά **α** €ρο και να **μειώσει** τις μηνιαίες αποδοχές των στελεχών κατά **β** €ρο ώστε το **μέσο** μηνιαίο μισθολόγιο να **μην υπερβεί** τα **840 €**ρο
Να αποδείξετε ότι **$4\alpha - \beta \leq 100$**



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

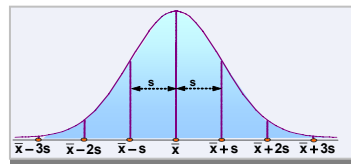
Συντελεστής μεταβολής

Ημερομηνία : _ _ - _ - _

Θεωρία

Έστω η καμπύλη συχνοτήτων που είναι κανονική ή περίπου κανονική.

Έστω \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.



A₁ Στο $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται περίπου το των παρατηρήσεων.

A₂ Στο $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται περίπου το των παρατηρήσεων.

A₃ Στο $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ βρίσκεται περίπου το των παρατηρήσεων.

B Είναι $R \cdot \bar{x} \cong 6 \cdot s \cdot \delta$

F₁ Τι λέμε συντελεστή μεταβολής ή μεταβλητότητας **CV** των παρατηρήσεων;

F₂ Πότε ένα δείγμα λέγεται ομοιογενές;

F₃ Όσο μικρότερο **CV** έχουμε, τόσο μικρότερη διασπορά έχουμε.

Δ₁ Αν $y_1 = x_1 + c, \dots, y_v = x_v + c$... c : σταθερά, τότε $\bar{y} = \bar{x}$, $s_y = s_x + |c|$

Δ₂ Αν $y_1 = cx_1, \dots, y_v = cx_v$... c : σταθερά, τότε $\bar{y} = c \cdot \bar{x}$, $s_y = |c| s_x$

Θέμα

Ο χρόνος ομιλίας σε min το μήνα v μαθητών, είναι περίπου κανονική

με μέση τιμή \bar{x} , τυπική απόκλιση s και συντελεστή μεταβλητότητας **CV** = 20%

Πάνω από 14 λεπτά, μιλάει μόνο το 2,5% του δείγματος, 68 μαθητές μιλάνε 68 περισσότερο από 10 min και λιγότερο από 12 min

A₁) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του χρόνου ομιλίας.

A₂) Να βρείτε το πλήθος v των μαθητών.

B) Να βρείτε πόσοι μαθητές μιλάνε λιγότερο από 12 min.

F₁) Η εταιρεία τηλεφωνίας, **πριμοδοτεί** όλους τους μαθητές κατά 10% επιπλέον δωρεάν χρόνο ομιλίας. **Μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβλητότητας;**

F₂) Στη συνέχεια, μετά την προηγούμενη πριμοδότηση, η εταιρεία **ξαναπριμοδοτεί** όλους τους μαθητές, με μισή ώρα επιπλέον δωρεάν χρόνο ομιλίας. Είναι τώρα το δείγμα ομοιογενές;



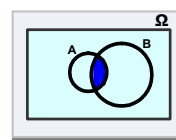
Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Ενδεχόμενα

Ημερομηνία : _ - _ -

Θεωρία**A₁** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **αιτιοκρατικό** πείραμα.**A₂** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **πείραμα τύχης**.**A₃** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **δυνατά αποτελέσματα** του πειράματος.**A₄** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **δειγματικό χώρο Ω****B₁** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **ενδεχόμενο** ή **γεγονός**.**B₂** ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**.**B₃** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **ευνοϊκές περιπτώσεις** ενός ενδεχομένου.**Γ**. Έστω τα ενδεχόμενα **A** , **B****Γ₁** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **τομή** και τι **ένωση** δυο ενδεχομένων.**Γ₂** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **συμπλήρωμα** του **A****Γ₃** ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **διαφορά** του **A** από το **B****Δ**. Να γράψετε με τη βοήθεια των συνόλων, το ενδεχόμενο**Δ₁** ☞ να πραγματοποιείται ή **μόνο** το **A** ή **μόνο** το **B****Δ₂** ☞ να **μην** πραγματοποιείται **κανένα** από τα **A** και **B****E₁** $A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$ **E₂** $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ **Θέμα**Ρίχνουμε ένα **νόμισμα 3 φορές**.**A)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα**A₁) A**: “Το αποτέλεσμα της **1^{ης}** ρίψης να είναι **διαφορετικό** από τα αποτελέσματα της **2^{ης}** ρίψης και **3^{ης}** ρίψης”**A₂) B**: “Το αποτέλεσμα της **3^{ης}** ρίψης να είναι **διαφορετικό** από τα αποτελέσματα της **1^{ης}** ρίψης και **2^{ης}** ρίψης”**B)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα **B₁) A ∩ B** , **B₂) A ∩ B'** , **B₃) A ∪ B'** , **B₄) A ∩ B ∩ B'**

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Πιθανότητες

Ημερομηνία : _ - _ -

Θεωρία

A Σε n εκτελέσεις ενός πειράματος, ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται k φορές.

Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **σχετική συχνότητα** του ενδεχομένου A

B₁ Τι ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμο των μεγάλων αριθμών**.

B₂ Να αναφέρετε πως ορίζεται η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου A

σε ένα δειγματικό χώρο πεπερασμένου πλήθους στοιχείων με **ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα**.

Γ Να αναφέρετε γενικότερα, πως ορίζεται η **πιθανότητα**

ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$

σε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ πεπερασμένου πλήθους στοιχείων.

Θέμα

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται σε ασθενείς που πάσχουν από κάποιο νόσημα που οφείλεται και σε κληρονομικούς παράγοντες.

Ηλικία ασθενούς	Ελαφριά Περίπτωση		Σοβαρή περίπτωση	
	Με κληρονομικά αίτια		Με κληρονομικά αίτια	
	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Κάτω από 50 ετών	15%	10%	8%	2%
Πάνω από 50 ετών	15%	20%	20%	10%

Επιλέγουμε τυχαία έναν ασθενή και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Η κατάσταση του ασθενή να είναι σοβαρή.»

B: «Ο ασθενής είναι κάτω από 50 ετών.»

Γ: «Υπάρχουν κληρονομικά αίτια.»

A) Να βρείτε τις πιθανότητες **A₁)P(A)** **A₂)P(B)** **A₃)P(Γ)** **A₄)P(A∩B)** **A₅)P(A∪Γ)**

B) Να **διατυπώσετε** στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

B₁)A'∩B' **B₂)(A∩B)'** **B₂)A'∩B** **B₃)(A∪B)'** **B₄)A'∪B'** **B₅)A-B** **B₅)A-(A∩B)**

παραστήστε τα με διαγράμματα **Venn** και να βρείτε τις **πιθανότητες** τους.

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

Βαθμός:

Πιθανότητες

Ημερομηνία: _ - _ - _

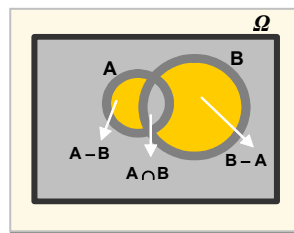
Θεωρία

A ➔ Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του χώρου Ω , ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$

B₁ Για τα ενδεχόμενα A, B του χώρου Ω είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

B₂ Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A \cap B) \leq P(B)$

B₃ $P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B) = P(A)$

**Θέμα**

Έστω τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ώστε $P(A - B) = \frac{1}{4}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

A₁ Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$

A₂ Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) \geq 0,25$

Έστω τώρα ότι είναι και $2P((A \cup B)') = 1$

B Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα $P(B) = \frac{1}{4}$

Γ Να βρείτε τις πιθανότητες **Γ₁** $P(B - A)$

Γ₂ $P((A - B) \cup (B - A))$

Γ₃ $P((A - B) \cap (B - A))$

Γ₄ $P((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A))$

Δ Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B



Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

Όνομα:

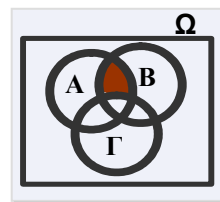
Βαθμός:

Πιθανότητες

Ημερομηνία : _ - _ -

Θεωρία**A** Έστω ο χώρος Ω και τα ενδεχόμενα **A** και **B** αυτούώστε όταν **δεν πραγματοποιείται το A** να μην πραγματοποιείται και το **B**Η πιθανότητα να πραγματοποιείται το "**A** αλλά όχι το **B**", είναι $P(A) - P(B)$ **B** Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και τα **μη κενά** ενδεχόμενά του **A**, **B**, **Γ**

όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα

με τα διαγράμματα του **Venn**.Να εκφράσετε το **γραμμοσκιασμένο χωρίο**, σε συνάρτηση των **A**, **B**, **Γ****Θέμα**Από τους ένοικους μίας πολυκατοικίας ένα **60%**αυτών ενοικιάζει **βιντεοκασέτα** ένα **40%** αυτών ενοικιάζει **DVD**και το **48%** αυτών ενοικιάζει **μόνο βιντεοκασέτα** και **δεν ενοικιάζει DVD**Επίσης υπάρχουν και **3** ένοικοι που **δεν ενοικιάζουν κανένα** από τα δύο.

Επιλέγουμε τυχαία ένα ένοικο.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα **V**: Ο ένοικος να ενοικιάζει **Video**και **D**: Ο ένοικος να ενοικιάζει **DVD****A)** Ποια είναι η πιθανότητα ο ένοικος να ενοικιάσει **βιντεοκασέτα** και **DVD****B)** Διατυπώστε το ενδεχόμενο $D \cap V'$ και **υπολογίστε** την **πιθανότητά** του.**Γ)** Να βρείτε την πιθανότητα, ο ένοικος να **μην ενοικιάσει βιντεοκασέτα** και να **μην ενοικιάσει DVD**.**Δ)** Υπολογίστε το **πλήθος** των ενοίκων της πολυκατοικίας.

Επιτρέπεται η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εντός του φροντιστηρίου

